KAMATNI RAČUN

Na novac K, koji neko lice (pravno ili fizičko) ulaže u neki posao, poslije određenog vremenskog perioda t dodaje se izvjesna suma i, tako da po isteku vremena t važi da je:

$$K_t = K + i$$

K_t - ukupan iznos po isteku vremena t

K - uložena suma, glavnica ili kapital

t – obračunski period odnosno vremenski interval po čijem isteku se dodaje iznos i

i - kamata ili interes za taj period

KAMATNI RAČUN

Kamata i se računa kao procenat p% od:

- uložene sume K – ***DEKURZIVNI obračun kamate***
- konačne sume Kt – ***ANTICIPATIVNI obračun kamate***

Kod dekurzivnog obračuna kamata se računa i dodaje glavnici na kraju perioda, a kod anticipativnog se obračun i odbijanje kamate vrši početkom perioda.

Broj p se zove ***kamatna (ili interesna) stopa*** i vezana je za određeni vremenski period, najčešće jednu godinu.

Za obračunski period se obično uzima jedna godina (=360 dana), jedan semestar, jedan kvartal, jedan mesec, jedan dan, ili ponekad beskonačno mali interval.

PRIMJER 6:

Ako glavnicu K=100 n.j. uložimo u banku na jednu godinu (t = 1 godina) uz 8 % godišnje kamate, onda po isteku te godine, konačna suma iznosi:

uz dekurzivni obračun kamate: $K_1 = K + 8\%K = 108$

pri anticipativnom obračunu kamate konačna suma K1' je:

$$K_1^{'} - p\%K_1^{'} = K$$

tj.: $K_1^{'} = 100 + 8\%K_1^{'} \Rightarrow K_1^{'} \cdot \frac{92}{100} = K$

odnosno: $K_1^{'} = \frac{2.500}{23} = 108{,}695 \cong 108{,}7$

Kako se procenat 8% primjenjuje na različite osnove, jasno je da su konačni iznosi K_1 i K_1' pri dekurzivnom i pri anticipativnom obračunu kamate - različiti.

EKVIVALENTNE KAMATNE STOPE

Za dekurzivnu i anticipativnu kamatnu stopu p_d i p_a kažemo da su EKVIVALENTNE ako za datu glavnicu daju isti krajnji iznos.

$$K_1 = K + \frac{p_d K}{100} \quad \text{odnosno} \quad K_1 = K \cdot \left(1 + \frac{p_d}{100}\right)$$

$$K_1 = K + \frac{p_a K_1}{100} \quad \text{odnosno} \quad K_1 = K \cdot \frac{100}{100 - p_a}$$

$$1 + \frac{p_d}{100} = \frac{100}{100 - p_a}$$

Iz prethodne relacije slijedi:

$$p_d = \frac{100 p_a}{100 - p_a}$$

$$p_a = \frac{100 p_d}{100 + p_d}$$

PROSTI I SLOŽENI INTERESNI RAČUN

Neka je glavnica K uložena u banku uz godišnju dekurzivnu kamatnu stopu p i godišnji obračun kamate na više, npr. n godina.

$$K_1 = K + i_1 = K + \frac{pK}{100}$$

K_1 – iznos krajem prve (početkom druge) godine

Za drugu i sve sljedeće godine kamatna stopa p se primjenjuje:

- ✓ na glavnicu K – **PROSTI INTERESNI RAČUN** ili
- ✓ na ukupan iznos iz prethodne godine (tj. na iznos koji se dobija kao zbir glavnice K i svih kamata) – **SLOŽENI INTERESNI RAČUN**

PROSTI INTERESNI RAČUN

Označimo sa K_m ukupan iznos krajem m-te godine (početkom (m+1)-ve godine) i sa i_m interes za m-tu godinu. Pri prostom interesnom računu, za m = 1, 2, ... ,n važe relacije:

$$K_1 = K + \frac{pK}{100}, \quad K_2 = K_1 + \frac{pK}{100} = K + \frac{2pK}{100}, \quad \ldots \quad , K_n = K + \frac{npK}{100}$$

$$i_1 = i_2 = \ldots = i_n$$ **svi godišnji interesi su jednaki**

$$K - K_1 = K_2 - K_1 = \ldots = K_n - K_{n-1}$$

iznosi K_1, K_2, ... ,K_n obrazuju aritmetički niz čiji je prvi član K i razlika $i = \frac{pK}{100}$

SLOŽENI INTERESNI RAČUN

$$K_1 = K - i_1 = K + \frac{pK}{100} = K(1 + \frac{p}{100}) = Kq$$

$$K_2 = K_1 + \frac{pK_1}{100} = K_1 q = Kq^2 \qquad \text{gdje je} \qquad q = 1 + \frac{p}{100}$$

$$\ldots$$

$$K_n = Kq^n$$

Iznosi K_1, K_2, ... ,K_n obrazuju geometrijski niz čiji je prvi član K i količnik q.

NOMINALNA, RELATIVNA I KONFORMNA KAMATNA STOPA

Neka je p – godišnja kamatna stopa

Ukoliko se obračun kamata vrši m puta godišnje, onda godišnjoj kamatnoj stopi p za m-ti dio godine odgovara kamatna stopa:

$\frac{p}{m}$ - **RELATIVNA kamatna stopa za m-ti dio godine**.

Konačna suma K_1, koju dobijamo ulaganjem sume K_0 uz godišnju kamatnu stopu p i uz m obračuna godišnje, iznosi:

$$K_1 \equiv K_{1,m} = K_0 (1 + \frac{p}{100m})^m$$

Za n godina, pod istim uslovima, konačan iznos bi bio:

$$K_{n,m} = K_0 (1 + \frac{p}{100m})^{nm}$$

KONFORMNA KAMATNA STOPA

KONFORMNA kamatna stopa za m-ti dio godine (p_m) koja odgovara godišnjoj kamatnoj stopi p je ona kamatna stopa čijom primjenom m puta na glavnicu K, pri složenom interesu, dobijamo isti iznos kao i pri ulogu glavnice K na jednu godinu uz godišnju kamatnu stopu p i godišnji obračun.

$$K(1+\frac{p}{100}) = K(1+\frac{p_m}{100})^m$$

odakle je

$$p_m = 100 \cdot (\sqrt[m]{1+\frac{p}{100}} - 1)$$

NOMINALNA KAMATNA STOPA

NOMINALNA kamatna stopa je jednaka proizvodu konformne stope p_m (za m-ti dio godine) i broja m.

Iz relacije: $$(1+\frac{p_m}{100})^m = 1+\frac{p}{100}$$

Primjenom binomnog obrazca dobijamo da je:

$$1+\frac{mp_m}{100} + \binom{m}{2}\left(\frac{p_m}{100}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{p_m}{100}\right)^m = 1+\frac{p}{100}$$

Odbacivanjem trećeg i svih daljih članova na lijevoj strani, slijedi:

$mp_m < p$ **nominalna kamatna stopa je manja od odgovarajuće godišnje stope**

$p_m < \frac{p}{m}$ **za datu godišnju kamatnu stopu p, odgovarajuća konformna stopa je manja od relativne kamatne stope m-tog dijela godine**

ESKONTNI RAČUN

MJENICA je vrednosni papir određene forme kojim se jedno preduzeće (dužnik) obavezuje da će u ugovorenom roku - ***roku dospijeća*** isplatiti drugom preduzeću (povjeriocu) iznos novca naznačen na mjenici, tzv. ***nominalnu vrijednost mjenice***.

Kamata se obračunava po prostom interesnom računu i uz primjenu anticipativnog obračuna kamata (unaprijed na nominalnu (konačnu) vrijednost).

Zajmoprimcu se isplaćuje nominalni iznos umanjen za kamate a nakon ugovorenog roka korisnik zajma je dužan podmiriti zajmovcu nominalni iznos zajma.

Rok dospjeća mjenice je obično nekoliko dana ili nekoliko mjeseci.

ESKONTNI RAČUN

$$K_n = K_0 + \frac{np}{36.000} \cdot K_n$$

$$K_0 = K_n\left(1 - \frac{np}{36.000}\right)$$

$$K_n - K_0 = \frac{Kn \cdot np}{36.000}$$

K_n - nominalna vrijednost mjenice

K_o – eskontovana vrijednost mjenice

p – godišnja kamatna stopa

n - broj dana za koje treba obračunati kamatu

Ovako obračunata kamata zove se (komercijalni) **ESKONT.**

Prilikom obračuna eskonta dan eskontovanja se ne računa, a posljednji dan se računa u broj dana za koje treba obračunati kamatu.

POTROŠAČKI ZAJMOVI

Ove zajmove kreditor (banka, preduzeće) odobrava fizičkom licu u tačno određenu svrhu i pod utvrđenim uslovima, na kratak rok. Tim uslovima predviđa se visina zajma, namjena, rok vraćanja, kamatna stopa i obavezno novčano učešće korisnika zajma.

Ukupni dug koji je korisnik zajma obavezan da vrati dobije se tako što se od nominalnog iznosa zajma oduzme obavezno učešće, pa se tom preostalom dijelu dodaju kamate.

Mjesečna otplata (prosječni anuitet) se dobija kada se ukupni dug podijeli sa brojem mjeseci za koje je dužnik obavezan da vrati zajam.

Kamatni koeficijent k je zbir svih mjesečnih anticipativno obračunatih kamata na zajam od 100 jedinica.

POTROŠAČKI ZAJMOVI

Početkom prvog mjeseca dužnik plaća kamatu na svih 100 din, pa ta kamata iznosi $\frac{100p}{1.200}$

Krajem mjeseca uplaćuje se prva rata $\frac{100}{n}$

Preostali dug krajem prvog mjeseca iznosi $100 - \frac{100}{n}$

Na taj dug početkom drugog mjeseca plaća se kamata $(100 - \frac{100}{n}) \cdot \frac{p}{1.200}$

Krajem drugog mjeseca plaća se sljedeća rata $\frac{100}{n}$, preostali dug iznosi $100 - \frac{100}{n} - \frac{100}{n}$ a kamata početkom mjeseca iznosi $(100 - 2 \cdot \frac{100}{n}) \cdot \frac{p}{1.200}$

POTROŠAČKI ZAJMOVI

Nastavljajući isti postupak zaključujemo da je kamata za posljednji mjesec:

$$\left[100-(n-1)\cdot\frac{100}{n}\right]\cdot\frac{p}{1.200}=\frac{100}{n}\cdot\frac{p}{1.200}=\frac{p}{12n}$$

Zbir svih kamata je:

$$k=\frac{p}{1.200}\cdot 100+\frac{p}{1.200}\cdot(100-\frac{100}{n})+\frac{p}{1.200}\cdot(100-2\cdot\frac{100}{n})+\ldots+\frac{p}{1.200}\cdot\frac{100}{n}$$

$$=\frac{p}{1.200}\cdot\left[100+(100-\frac{100}{n})+(100-2\cdot\frac{100}{n})+\ldots+\frac{100}{n}\right]$$

Zbir u srednjoj zagradi je zbir prvih n članova aritmetičkog niza čiji je prvi član $a_1=100$, n-ti $a_n=\frac{100}{n}$, pa je:

$$k=\frac{p}{1.200}\cdot\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{p}{1.200}\cdot\frac{n}{2}(100+\frac{100}{n})=\frac{p}{1.200}\cdot\frac{100(n+1)}{2}$$

POTROŠAČKI ZAJMOVI

$$k = \frac{(n+1)p}{24}$$ **Kamatni koeficijent**

Ako je K nominalni iznos zajma i $s\%K$ obavezno učešće, za otplatu ostaje iznos $K - s\%K$ uvećan za kamate. Kako je ukupna kamata na 100 nj. kamatni koeficijent k, to ukupna kamata na iznos $K - s\%K$ iznosi $k \cdot \frac{K - s\%K}{100}$, pa slijede relacije:

$$K - s\%K + k \cdot \frac{K - s\%K}{100}$$ **ukupni dug**

$$R = \frac{1}{n} \cdot \left[K - s\%K + k \cdot \frac{K - s\%K}{100} \right]$$

mjesečna rata (prosječni anuitet)

$$R = \frac{1}{n} \cdot (1 + \frac{k}{100}) \cdot (K - \frac{sK}{100})$$

PERIODIČNE UPLATE I ISPLATE

RAČUN ULOGA se bavi obračunom konačnog iznosa pri ulaganju jednakih novčanih uloga u jednakim vremenskim razmacima, a **RAČUN RENTE** - pri podizanju istog novčanog iznosa.

Uvedimo sledeće oznake:

U - novčani iznos koji se, npr. početkom (anticipativni ulozi) svake godine za n godina uz kamatnu stopu p i dekurzivno i složeno kapitalisanje ulaže u banku.

U_m - ukupan iznos početkom m-te godine

U'_m - ukupan iznos krajem m-te godine (m = 1, 2, ... , n)

PERIODIČNE UPLATE

Slijede relacije:

$$U_1 = U \qquad U_1' = U + \frac{pU}{100} = Up \qquad q = 1 + \frac{p}{100}$$

$$U_2 = Uq + U = U(1+q) \qquad U_2' = U(1+q) + \frac{U(1+q)p}{100} = Uq(1+q)$$

$$U_3 = Uq(1+q) + U = U(1+q+q^2) \qquad U_3' = Uq(1+q+q^2)$$

$$\dots$$

$$U_n = U(1+q+q^2+\dots+q^{n-1}) = U\frac{q^n-1}{q-1}$$

$$U_n' = Uq(1+q+q^2+\dots+q^{n-1}) = Uq\frac{q^n-1}{q-1}$$

PERIODIČNE ISPLATE

Pretpostavimo da se od iznosa K uloženog uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu p za n godina početkom (anticipativna renta) svake godine podiže isti iznos - **renta R**. Označimo sa K_m preostali novčani iznos početkom i sa $K_m^{'}$ preostali novčani iznos krajem m-te godine. Tada je:

$$K_1 = K - R \qquad K_1^{'} = (K - R)q = Kq - Rq$$

$$K_2 = (K - R)q - R = Kq - R(1 + q) \qquad K_2^{'} = Kq^2 - Rq(1 + q)$$

$$K_3 = K_2^{'} - R = Kq^2 - R(1 + q + q^2) \qquad K_3^{'} = Kq^3 - Rq(1 + q + q^3)$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$K_m = Kq^{m-1} - R\frac{q^m - 1}{q - 1} \qquad K_m^{'} = Kq^m - Rq\frac{q^m - 1}{q - 1}$$

Suma K se iscrpe onda kada je $K_m^{'} = 0$, tj.:

$$Kq^m = Rq\frac{q^m - 1}{q - 1} \qquad \text{ili} \qquad Kq^{m-1} = R\frac{q^m - 1}{q - 1}$$

INVESTICIONI ZAJMOVI

- Odobravaju se za tačno odeđenu namjenu, na duži rok, sa pravom kontrole i pravom preduzimanja sankcija, ukoliko se zajam ne troši namjenski.
- Zajam se vraća dogovorenim novčanim iznosima - ***ANUITETIMA*** **-** u jednakim vremenskim razmacima: godišnje, polugodišnje itd.

  Anuitet se sastoji iz:

  - RATE – kojom se vraća glavni dug i

  - KAMATE
- Zajam se obično vraća:

✓***jednakim ratama*** ili

✓***jednakim anuitetima***

početkom ili krajem dogovorenog vremenskog intervala i uz dekurzivni ili anticipativni obračun kamata.

INVESTICIONI ZAJMOVI

Pretpostavimo da se zajam K vraća za n godina krajem godine uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu p i godišnji obračun kamata. Tada važe sledeće relacije:

$$\sum a_m = \sum R_m + \sum i_m$$

$$\sum R_m = K$$

$$K_{n-1} = R_n$$

$$K_n = 0 \;\; (*)$$

Gdje je :

K_m- preostali dio zajma (glavnog duga);

a_m -godišnji anuitet;

R_m – odgovarajuća rata za m-tu godinu, m =1, 2, ... ,n

i_m - interes za m-tu godinu, m = 1, 2, ... ,n.

Napraviti ***plan otplate (amortizacije) zajma*** znači izračunati sve navedene veličine K_m, i_m, R_m, a_m i svrstati ih (radi bolje preglednosti) u odgovarajuću tabelu.

VRAĆANJE ZAJMA JEDNAKIM RATAMA

$$R_1 = R_2 = \ldots = R_n \equiv R, \quad R = \frac{K}{n}$$

$$i_1 = \frac{pK}{100}, \quad i_2 = \frac{p(K-R)}{100}, \quad \ldots \quad , i_n = \frac{p[K-(n-1)R]}{100}$$

$$a_1 = R + i_1, \quad a_2 = R + i_2, \quad \ldots \quad , a_n = R + i_n$$

Uzastopni godišnji interesi obrazuju artimetički niz čiji je prvi član i_1, n-ti član i_n i razlika $\frac{pR}{100}$, pa je zbir svih godišnjih kamata :

$$\sum i_m = (i_1 + i_n) \cdot \frac{n}{2} = \left(\frac{pK}{100} + \frac{pK}{100} - \frac{pK}{100} + \frac{pK}{100n}\right) \cdot \frac{n}{2} = \frac{pK(n+1)}{200}$$

Godišnji anuiteti obrazuju artimetički niz čiji je prvi član a_1, n-ti član a_n i razlika $\frac{pR}{100}$, pa je zbir svih godišnjih kamata :

$$\sum a_m = \sum i_m + nR = \frac{pK(n+1)}{200} + K = K\left[1 + \frac{p(n+1)}{200}\right]$$

VRAĆANJE ZAJMA JEDNAKIM ANUITETIMA KRAJEM ROKA

Godišnji anuiteti su jednaki i iznose:

$$\boxed{a_1 = a_2 = \ldots = a_n \equiv a}$$

$$i_1 = \frac{pK}{100} \Rightarrow K_1 = K + \frac{pK}{100} - a = Kq - a$$

$$i_2 = \frac{pK_1}{100} \Rightarrow K_2 = K_1 + \frac{pK_1}{100} - a = K_1 q - a = Kq^2 - aq - a = Kq^2 - a(1+q)$$

$$i_3 = \frac{pK_2}{100} \Rightarrow K_3 = K_2 + \frac{pK_2}{100} - a = Kq^3 - a(1+q+q^2)$$

...

$$i_n = \frac{pK_{n-1}}{100} \Rightarrow K_n = Kq^n - a(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1})$$

VRAĆANJE ZAJMA JEDNAKIM ANUITETIMA KRAJEM ROKA

Zajam je vraćen kada je $K_n = 0$, tj.:

$$a(1 + q + \ldots + q^{n-1}) = Kq^n$$

Izraz u zagradi je zbir od n članova geometrijskog niza čiji je prvi član 1, količnik q, pa je:

$$a\frac{q^n - 1}{q - 1} = Kq^n$$

Odnosno godišnji anuitet je:

$$\boxed{a = Kq^n \frac{q-1}{q^n - 1}}$$

Iz poznatog anuiteta i interesa određujemo ratu:

$$R_m = a_m - i_m = a - i_m$$

VRAĆANJE ZAJMA JEDNAKIM ANUITETIMA

KRAJEM ROKA

Dokažimo da uzastopne rate obrazuju geometrijski niz čiji je prvi član R_1 i količnik q.

Kako je:

$$a = R_1 + i_1 \qquad \text{i} \qquad a = R_2 + i_2$$

Izjednačavajući desne strane i zamjenjujući i_1 i i_2 svojim vrijednostima, dobijamo da je:

$$R_2 + \frac{pK_1}{100} = R_1 + \frac{pK}{100}$$

Odnosno:

$$R_2 = R_1 + \frac{p(K - K_1)}{100} = R_1 + \frac{pR_1}{100} = R_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$R_2 = R_1 q$$

Na isti se način provjerava da je:

$$\boxed{R_m = R_{m-1} q = R_1 q^{m-1}}$$

VRAĆANJE ZAJMA JEDNAKIM ANUITETIMA POČETKOM ROKA

$$K_1 = K - a + (K - a)\cdot\frac{p}{100} = Kq - aq$$

$$K_2 = (K_1 - a) + (K_1 - a)\cdot\frac{p}{100} = Kq^2 - aq(1+q)$$

$$K_3 = Kq^3 - aq(1+q+q^2)$$

$$\ldots$$

$$K_{n-1} = Kq^{n-1} - aq\frac{q^{n-1}-1}{q-1}$$

Neka je K_n' ostatak zajma početkom n-te godine. Tada važi:

$$K_n^{'} = K_{n-1} - a$$

Iz uslova Kn'=0 dobijamo anuitet:

$$\boxed{a = Kq^{n-1}\frac{q-1}{q^n-1}}$$

SLUČAJ ANTICIPATIVNOG OBRAČUNA KAMATA

- Zamjenom anticipativne ekvivalentnom dekurzivnom stopom, obračun možemo napraviti kao u prethodnim slučajevima.
- Međutim, zajmodavac može da traži da se kamate i efektivno daju unaprijed. U tom slučaju korisnik dobija zajam umanjen za kamatu, tj, ako je (anticipativna) kamatna stopa p:

$$K-\frac{Kp}{100}=K\left(1-\frac{p}{100}\right)=\frac{K}{r},\quad r=\frac{100}{100-p}$$

- Zbir sadašnjih vrijednosti svih anuiteta (ako se plaćaju krajem termina) je:

$$\frac{a}{r}+\frac{a}{r^2}+,\dots,+\frac{a}{r^n}$$

- Prema principu ekvivalencije, imamo da je:

$$\frac{K}{r}=\frac{a}{r}+\frac{a}{r^2}+,\dots,+\frac{a}{r^n}$$ odnosno $$\boxed{a=Kr^{n-1}\frac{r-1}{r^n-1}}$$

INTERKALARNA KAMATA

- Korisnik zajma, obično, ne podiže cio zajam odjednom, nego u djelovima - tzv. ***tranšama*** - zavisno od tempa realizacije projekta za koji je dobio zajam.
- **Interkalarna kamata** se plaća za vrijeme koje protekne od momenta dobijanja tranše do početka vraćanja zajma (tzv. grace (grejs) period).
- 3 metode obračuna interkalarne kamate:

1. Kamata se obračunava prostim interesnim računom uz primjenu dogovorene kamatne stope na cio zajam za polovinu broja termina.

2. Prostim interesnim računom kamata se obračuna za svaku tranšu posebno za jedno polugodište manje od ukupnog broja termina.

3. Kamata se obračunava po složenom kamatnom računu za svaku tranšu posebno, a za broj termina se uzima broj polugodišta umanjen za jedan za svaku tranšu pojedinačno. Kamatna stopa je polugodišnja relativna ili konformna.

ISPITIVANJE RENTABILNOSTI INVESTICIJE

METODA RAVNOMJERNIH EKVIVALENTNIH GODIŠNJIH TROŠKOVA (EGT)

- Metoda se sastoji u tome da se svi troškovi (bilo da su godišnji ili zbirni) po svim varijantama svedu na jednake godišnje iznose. Ona varijanta po kojoj su ti troškovi najmanji biće najrentabilnija.

- Ukoliko troškovi korišćenja i održavanja nijesu isti svake godine onda najprije treba izračunati njihovu sadašnju vrijednost, koja će biti osnovica za obračun anuiteta. Tako nastaju EGT korišćenja i održavanja. Nabavna vrijednost mašine i sl. je već sadašnja vrijednost pa će se EGT od nabavne vrijednosti dobiti primjenom obrasca za anuitet, gdje je K jednako nabavnoj vrijednosti. Ukupni EGT jednak je zbiru prethodna dva EGT-a.

METODA SADAŠNJE VRIJEDNOSTI

- Metoda se sastoji u tome da se svi troškovi po svim varijantama svedu na sadašnje troškove (trenutak t=0) i tako svedeni troškovi uporede.
- Ako investicije ne daju isti efekat tada se izračuna neto efekat investicije (kapitalna vrijednost investicije) za t=0 , kao razlika sadašnje vrijednosti prihoda i sadašnje vrijednosti troškova.
- Ako je riječ o rentabilnosti jedne investicije, ona je rentabilna ako je njen neto efekat pozitivan. Prosječni godišnji neto efekat investicije dobijamo ako izračunamo anuitet od neto efekta (za t=0).

Metod sadašnje vrijednosti kvantifikuje očekivanu rentabilnost investicije u apsolutnom monetarnom iznosu za razliku od anuitetnog metoda, koji pruža mogućnost kvantifikacije prosječnih veličina karakterističnih za investiciju.